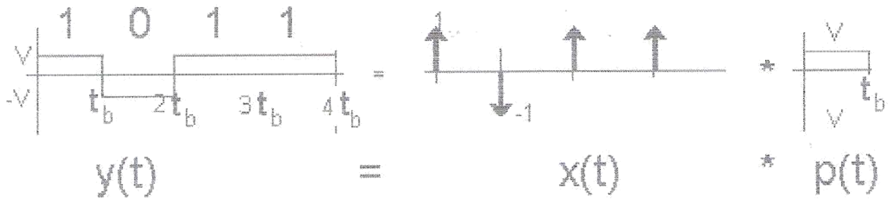
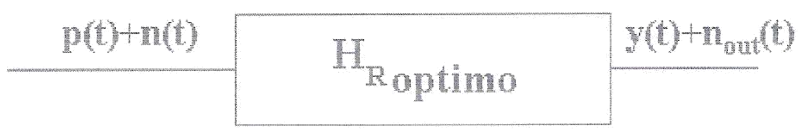
Cuando se vio codificación, se modeló la señal digital como la convolución de una secuencia de impulsos de pesos aleatorios con un pulso básico p(t). Este pulso es una señal de energía. Por ejemplo para NRZ polar:



Si uno analiza la respuesta para un pulso aislado se puede en un futuro tomar en consideración la ocurrencia aleatoria de los mismos cuando se modele el sistema como la cascada de Transmisor-Canal-Receptor. Hasta ahora el receptor se ha modelado como un filtro pasabajo ideal. Ahora buscaremos el receptor óptimo bajo la siguiente premisa:



Para conseguir $H_{Róptimo}$ se debe maximizar la relación $[y(t_0)/\sigma]$ donde el tiempo t_0 es un punto de muestreo y σ es el voltaje r.m.s del ruido n_{out}.

Maximizar $[y(t_0)/\sigma]$ o su cuadrado es lo mismo y veremos como hacer esto ultimo simplifica los cálculos .

$$\frac{|y(t_0)|^2}{\sigma^2} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} P(f) H_R(f) e^{j\omega t_0}\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H_R(f)|^2\, df} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f)\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df}$$

La desigualdad de Schwartz establece que:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f)\, df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2\, df$$

La igualdad ocurre cuando $V(f)=kW(f)$ (son proporcionales)

En ese caso

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} V(f)W^*(f)df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|V(f)|^2 df} = \int_{-\infty}^{\infty}|W(f)|^2 df$$

En nuestro caso, podemos definir:

$$V(f) = \sqrt{G_n(f)}H_R(f)$$
$$V(f)W^*(f) = \sqrt{G_n(f)}H_R(f)W^*(f) = P(f)H_R(f)e^{j\omega t_0} \Rightarrow$$
$$W(f) = \frac{P^*(f)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{G_n(f)}}$$

El máximo de la relación ocurre cuando

$$V(f) = \sqrt{G_n(f)}H_R(f) = kW(f) = k\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{G_n(f)}} \Rightarrow$$
$$H_R(f) = k\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_0}}{G_n(f)}$$

Se observa que la respuesta en frecuencia del filtro óptimo es: a) Proporcional a $P^*(f)$ b) Inversamente proporcional a $G_n(f)$ y presenta una exponencial compleja que representa un retardo temporal igual al del pulso menos el tiempo t_o. Con este filtro se logra un máximo que es igual a

$$\left.\frac{|y(t_0)|^2}{\sigma^2}\right|_{max} = \int_{-\infty}^{\infty}|W(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|P(f)|^2}{G_n(f)}df$$

Desarrollaremos un ejemplo completo.

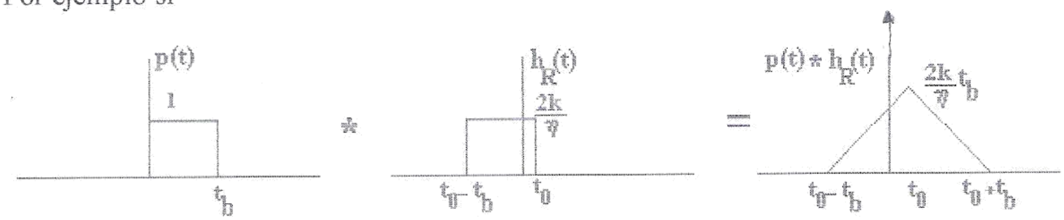
Suponga una transmisión digital con pulsos $p(t)$ que en el canal se contamina con ruido blanco. Determine $h_{R\acute{o}ptimo}$ y la relación $[y(t_0)/\sigma]$ máxima.

$$H_R(f) = \frac{2kP^*(f)e^{-j\omega t_0}}{\eta}$$

$$h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kP^*(f)e^{-j\omega t_0}}{\eta} e^{j\omega t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k[P(f)e^{-j\omega(t-t_0)}]^*}{\eta} df$$

Pero $h_R(t)= h_R^*(t)=2k/\eta\ p(t_0-t)$

Por ejemplo si



$$p(t) = \prod\left(\frac{t-0.5t_b}{t_b}\right)$$

$$h_R(t) = \prod\left(\frac{t-t_0+0.5t_b}{t_b}\right)$$

Observe que el máximo de la convolución es igual a $y(t_0)=2kt_b/\eta$

En cuanto al ruido:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H_R(f)|^2 df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|h_R(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2}\int_{-t_b+t_0}^{t_0}\frac{4k^2}{\eta^2}dt = \frac{2k^2}{\eta}t_b$$

$$\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2} = \frac{\frac{4k^2}{\eta^2}t_b^2}{\frac{2k^2}{\eta}t_b} = \frac{2t_b}{\eta}$$

Aplicando directamente la formula:

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \frac{2}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2 df = \frac{2}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|p(t)|^2 dt = \frac{2t_b}{\eta}$$

FILTRO ADAPTADO

Cuando el ruido es blanco el filtro óptimo se le llama filtro adaptado ya que su respuesta impulsiva toma la forma de p(t). En este caso:

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{G_n(f)} df = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E}{\eta}$$

$$E = St_b$$

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \frac{2St_b}{\eta} = \frac{S}{\eta B} = \left(\frac{S}{N}\right)$$

Ahora veamos un caso que será la base para los sistemas de modulación digital binaria: suponer asociada al "1" una forma $p_1(t)$ y al "0" una forma $p_0(t)$. Cuando se transmita el "1" el pulso a la salida lo llamaremos $p_{1o}(t)$; cuando se transmita el "0" el pulso a la salida lo llamaremos $p_{0o}(t)$

Se supondrá que a la entrada del sistema esta presente $p_1(t)$ o $p_0(t)$ mas el ruido n(t) y que a la salida tenemos $p_{1o}(t)$ o $p_{0o}(t)$ mas el ruido filtrado que llamaremos $n_{out}(t)$.

Vamos a inducir mas que deducir el resultado:

CASO A

Suponga que a la salida de un sistema binario se pueden tener solo dos niveles 0.5A y –0.5A mas el ruido. La probabilidad de error se calcula como:

$$P_e = 0.5P(0.5A + n < Umbral) + 0.5P(-0.5A + n > Umbral)$$

Si los valores 0.5A y –0.5A son equiprobables el umbral es cero, que en realidad se calcularía como:

U=0.5[0.5A + (-0.5A)]=0

Resultando que

P_e=P(n>0.5A)

CASO B

Suponga que a la salida de un sistema binario excitado con +p(t) o –p(t) se tiene a la salida $y(t_0)$ 0 $-y(t_0)$. La probabilidad de error se calcula como:

$$t_0 \; P_e = 0.5P(y(t_0) + n < Umbral) + 0.5P(-y(t_0) + n > Umbral)$$

Si los valores $y(t_0)$ y $-y(t_0)$ son equiprobables el umbral es cero, que en realidad se calcularía como: